数理解析研究所講究録
第 1746 巻 2011 年 1-21



# Asymptotic stability for a grain boundary motion model with constraint

佛教大学・教育学部　剣持信幸 (Nobuyuki Kenmochi)
Department of Education, School of Education, Bukkyo University

神奈川大学・工学部　山崎教昭 (Noriaki Yamazaki)
Department of Mathematics, Faculty of Engineering, Kanagawa University

## 1　序

本稿では，次のような結晶粒界を記述する数理モデル (P) を考察する:

$$
(\mathrm{P})\begin{cases}
\eta_t-\kappa\Delta\eta+g(\eta)+\alpha'(\eta)|\nabla\theta|=0 & \text{in } Q_T:=\Omega\times(0,T),\\
\alpha_0(\eta)\theta_t-\nu\Delta\theta-\mathrm{div}\left(\alpha(\eta)\dfrac{\nabla\theta}{|\nabla\theta|}\right)+\partial I_{[-\theta^*,\theta^*]}(\theta)\ni 0 & \text{in } Q_T,\\
\dfrac{\partial\eta}{\partial n}=0,\quad \theta=0 & \text{on } \Sigma_T:=\Gamma\times(0,T),\\
\eta(x,0)=\eta_0(x),\quad \theta(x,0)=\theta_0(x) & \text{for } x\in\Omega.
\end{cases}
$$

ここで, $\Omega$ は $\mathbf{R}^N$ $(N\geq 1)$ の有界領域で正則な境界 $\Gamma:=\partial\Omega$ をもつとする．$T$ は任意の正数, $\kappa>0$ と $\nu>0$ は十分小さい定数, $g(\cdot)$, $\alpha(\cdot)$, $\alpha_0(\cdot)$ は $\mathbf{R}$ 上の与えられた関数, $\theta^*>0$ は正定数, $I_{[-\theta^*,\theta^*]}(\cdot)$ は閉区間 $[-\theta^*,\theta^*]$ 上で定義された指示関数, $\partial I_{[-\theta^*,\theta^*]}(\cdot)$ は $I_{[-\theta^*,\theta^*]}(\cdot)$ の劣微分, $n$ は境界 $\Gamma$ 上の外向き単位法線ベクトル, $\eta_0(x)$, $\theta_0(x)$ は与えられた初期値である.

問題 (P) は Kobayashi-Warren-Carter 型 [18, 19] の結晶粒界数理モデルである．結晶粒界のダイナミックスにおいて，変数 $\theta$ は平均結晶方位を表す．また，$\eta$ は結晶方位の秩序変数で, $\eta=1$ のとき結晶方位は完全に決定されている状態，$\eta=0$ のときは結晶がない状態を表す.

結晶粒界問題に関する研究は，例えば [5, 6, 7, 18, 19, 20, 21] がある．特に，Kobayashi et al. [18] は非線形項 $\partial I_{[-\theta^*,\theta^*]}(\cdot)$ がない空間領域２次元の結晶粒界数理モデル (P) を提唱し, 極座標系 $(\eta,\theta)$ を用いて空間領域２次元の結晶粒界ダイナミックスを研究した．さらに，[18, 19] において，$\Omega$ が空間２次元の有界領域，$g(\eta)=\eta-1$, $\alpha_0(\eta)=\alpha(\eta)=\eta^2$ の場合の $\partial I_{[-\theta^*,\theta^*]}(\cdot)$ の項がない数理モデル (P) の数値実験が行われた.

近年, 問題 (P) の数学的な解析が行われている．実際，関数 $\alpha_0$ が strictly positive で，初期値 $\{\eta_0,\theta_0\}\in H^1(\Omega)\times H^1_0(\Omega)$ であるとき，[9, 10] において Kobayashi–Warren–Carter モデル (cf. [18])，つまり $\partial I_{[-\theta^*,\theta^*]}(\cdot)$ の項がない数理モデル (P) の可解性が示さ

れた．$\alpha_0$ が退化する場合 (i.e. $\alpha_0 \geq 0$) は，初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ で，$\Omega$ が $\mathbf{R}^N$ $(1 \leq N \leq 3)$ の有界領域であるとき，Kobayashi–Warren–Carter モデル (cf. [18]) の弱解の存在が [11] で示された．

[12] において数理モデル (P) が提唱され，関数 $\alpha_0$ が strictly positive ならば初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ をもつ (P) の時間大域解は少なくとも 1 つ存在することが示された．(P) の解の一意性は，初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ で，$\Omega$ が 1 次元領域の場合のみ示されている．また，[16] では (P) の解の漸近挙動を解の一意性なしで考察している．

本稿では，数理モデル (P) の漸近安定性を解の一意性なしで考察する．実際，$\Omega$ が $\mathbf{R}^N$ $(N \geq 1)$ の有界領域で，関数 $\alpha_0$ が strictly positive であるとき，(P) により生成された多価半群に対する大域的アトラクター $\mathscr{A}_\infty$ を構成する．更に，ある仮定の下で $\mathscr{A}_\infty$ の特徴づけを行う．

# 2 Known results

本稿を通じて，次の記号を用いる:

(1) Banach 空間 $X$ のノルムを $\|\cdot\|_X$ で表す．

(2) $H := L^2(\Omega)$ とし，その内積とノルムをそれぞれ $(\cdot,\cdot)$，$\|\cdot\|_H$ と表す．$H$ の 2 つの部分集合 $A$, $B$ に対して，$H$ における Hausdorff semi-distance を

$$\mathrm{dist}_H(A, B) := \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|_H$$

と定義する．また，通常のソボレフ空間をそれぞれ $L^\infty := L^\infty(\Omega)$, $H^1 := H^1(\Omega)$, $H_0^1 := H_0^1(\Omega)$, $H^2 := H^2(\Omega)$ で表す．

(3) 適正下半連続凸関数 $\psi : H \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ に対して，その有効領域を $D(\psi) := \{z \in H \mid \psi(z) < \infty\}$ で表し，$H$ での $\psi$ の劣微分を $\partial\psi$ で表す．つまり，$\partial\psi$ は $H$ から $2^H$ への多価作用素で，$z^* \in \partial\psi(z)$ であるとは

$$z \in D(\psi) \quad \text{and} \quad (z^*, y - z) \leq \psi(y) - \psi(z) \quad \text{for all} \quad y \in H$$

をみたすときをいう．また，$\partial\psi$ の定義域を $D(\partial\psi) := \{z \in H \mid \partial\psi(z) \neq \emptyset\}$ で表す．劣微分の基本的な性質は，[3, 15] を参照する．

(4) 直積空間 $H \times H$ の内積 $(\cdot,\cdot)_{H\times H}$ とノルム $\|\cdot\|_{H\times H}$ をそれぞれ

$$(\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\})_{H\times H} := (a_1, b_1) + (a_2, b_2),$$

$$\|\{a_1, a_2\}\|_{H\times H} := \sqrt{(\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_2\})_{H\times H}}$$

と定義する．また，$H \times H$ の2つの部分集合 $A$, $B$ に対して，$H \times H$ における Hausdorff semi-distance を

$$\mathrm{dist}_{H\times H}(A,B) := \sup_{\{a_1,a_2\}\in A} \inf_{\{b_1,b_2\}\in B} \|\{a_1,a_2\} - \{b_1,b_2\}\|_{H\times H}$$

と定義する．

本稿を通じて，以下を仮定する．

(A1) $\alpha_0$ は $C^2(\mathbf{R})$–関数で次をみたすとする：

$$\alpha_0 \geq \delta_0 \text{ on } \mathbf{R} \text{ for a positive constant } \delta_0.$$

(A2) $\alpha$ は 非負値 $C^1(\mathbf{R})$–関数で, その導関数 $\alpha'$ は $\mathbf{R}$ 上で定義された非減少有界関数で $\alpha'(0) = 0$ をみたすとする．

(A3) $g$ は $\mathbf{R}$ 上で定義された Lipschitz 連続関数で

$$g \leq 0 \text{ on } (-\infty, 0] \quad \text{and} \quad g \geq 0 \text{ on } [1, \infty)$$

をみたすとし，$g$ の Lipschitz 定数を $L(g)$ で表す．また，$g$ の原始関数を $\hat{g}$ で表し，$\hat{g}$ は $\mathbf{R}$ 上で非負値であるとする．

(A4) $\kappa$, $\nu$, $\theta^*$ は正の実定数とする．

(A5) 初期値 $\eta_0 \in H$ と $\theta_0 \in H$ は次をみたすとする：

$$0 \leq \eta_0 \leq 1 \text{ a.e. on } \Omega \quad \text{and} \quad |\theta_0| \leq \theta^* \text{ a.e. on } \Omega.$$

ここで，初期値の集合を

$$D := \left\{ \{\eta_0, \theta_0\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \eta_0 \in H \text{ with } 0 \leq \eta_0 \leq 1 \text{ a.e. on } \Omega, \\ \theta_0 \in H \text{ with } |\theta_0| \leq \theta^* \text{ a.e. on } \Omega \end{array} \right\}$$

と定める．同様に

$$D_0 := \left\{ \{\eta_0, \theta_0\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \eta_0 \in H^1 \text{ with } 0 \leq \eta_0 \leq 1 \text{ a.e. on } \Omega, \\ \theta_0 \in H_0^1 \text{ with } |\theta_0| \leq \theta^* \text{ a.e. on } \Omega \end{array} \right\}$$

と定義する．

次に，問題 (P) に対する解の定義を与える．

**定義 2.1.** $0 < T < \infty$ とする．関数 $\eta : [0,T] \to H$ と $\theta : [0,T] \to H$ の組 $\{\eta, \theta\}$ が次の条件をみたすとき，$\{\eta, \theta\}$ は初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in D$ をもつ (P) の $[0,T]$ 上の解であるという：

(i) $\eta \in C([0,T];H) \cap W^{1,2}_{loc}((0,T];H) \cap L^{\infty}_{loc}((0,T];H^1) \cap L^2_{loc}((0,T];H^2)$.

(ii) $\theta \in C([0,T];H) \cap W^{1,2}_{loc}((0,T];H) \cap L^{\infty}_{loc}((0,T];H^1_0)$, and $|\theta| \le \theta^*$ a.e. on $Q_T$.

(iii) 次の放物型方程式が成立する：

$$\eta'(t) - \kappa\Delta_N \eta(t) + g(\eta(t)) + \alpha'(\eta(t))|\nabla\theta(t)| = 0 \quad \text{in } H \quad \text{for a.e. } t \in (0,T), \tag{2.1}$$

ここで，$\eta' := \frac{d\eta}{dt}$ で，$\Delta_N : D(\Delta_N) := \{z \in H^2;\ \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \text{ a.e. on } \Gamma\} \longrightarrow H$ は斉次ノイマン境界条件をともなうラプラシアンである.

(iv) 次の変分不等式が成立する：

$$\begin{aligned}&(\alpha_0(\eta(t))\theta'(t), \theta(t) - z) + \nu\,(\nabla\theta(t), \nabla\theta(t) - \nabla z)\\ &+ \int_\Omega \alpha(\eta(x,t))|\nabla\theta(x,t)|dx \le \int_\Omega \alpha(\eta(x,t))|\nabla z(x)|dx\end{aligned} \tag{2.2}$$
for a.e. $t \in (0,T)$ and all $z \in H^1_0$ with $|z| \le \theta^*$ a.e. in $\Omega$.

ここで, $\theta' := \frac{d\theta}{dt}$ である.

(v) $\eta(0) = \eta_0$ and $\theta(0) = \theta_0$ in $H$.

関数 $\eta : [0,\infty) \to H$ と $\theta : [0,\infty) \to H$ の組 $\{\eta,\theta\}$ が (P) の時間大域解であるとは, 任意の $T > 0$ に対して $\{\eta,\theta\}$ が (P) の $[0,T]$ 上の解であるときをいう.

さて，変分不等式 (2.2) は次の発展方程式へ帰着できることに注意する (cf. [12, Section 3]):

$$\alpha_0(\eta(t))\theta'(t) + \partial\varphi(\eta(t);\theta(t)) \ni 0 \quad \text{in } H \quad \text{for a.e. } t \in (0,T). \tag{2.3}$$

ここで，$\varphi : H \times H \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ は

$$\varphi(w;z) := \begin{cases} \frac{\nu}{2}\|\nabla z\|^2_H + \int_\Omega \alpha(w(x))|\nabla z(x)|dx + \int_\Omega I_{[-\theta^*,\theta^*]}(z(x))dx & \text{if } z \in H^1_0, \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.4}$$

と定義された関数である. 明らかに, それぞれの $w \in H$ に対し $\varphi(w;\cdot) : H \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ は適正下半連続凸関数である. 従って，$z \in H$ に関する $\varphi(w;z)$ の劣微分 $\partial\varphi(w;z)$ が定義できる. よって，変分不等式 (2.2) と発展方程式 (2.3) は同値となることが容易にわかる.

また，問題 (P) の自由エネルギーは

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\eta,\theta) :=\ & \frac{\kappa}{2}\|\nabla\eta\|^2_H + \int_\Omega \hat{g}(\eta)dx + \frac{\nu}{2}\|\nabla\theta\|^2_H + \int_\Omega \alpha(\eta)|\nabla\theta|dx + \int_\Omega I_{[-\theta^*,\theta^*]}(\theta)dx\\ =\ & \frac{\kappa}{2}\|\nabla\eta\|^2_H + \int_\Omega \hat{g}(\eta)dx + \varphi(\eta;\theta)\end{aligned}$$

であることにも注意する.

問題 (P) の第２の方程式が (2.3) へ帰着されることに着目し，[12, 16] において (P) の解の存在と有界性の評価が示された.

**命題 2.2** (cf. [12, Theorem 2.2], [16, Theorem 3.1]). (A1)–(A5) を仮定し，$T$ を任意の正数とする．このとき，定義 *2.1* の意味で (P) の $[0,T]$ 上の解 $\{\eta,\theta\}$ が少なくとも 1 つ存在し，$\eta$ は次をみたす：

$$0 \le \eta \le 1 \quad a.e\ on\ Q_T. \tag{2.5}$$

更に，初期値 $\{\eta_0,\theta_0\} \in D$ に依存しない正定数 $N_0$ が存在し，次が成立する：

$$\sup_{t\ge 0}\int_t^{t+1} \mathcal{F}(\eta(\tau),\theta(\tau))d\tau \le N_0. \tag{2.6}$$

また，それぞれの正数 $\mu \in (0,1]$ に対し，初期値 $\{\eta_0,\theta_0\} \in D$ に依存しない正定数 $M_\mu$ が存在し，次が成立する：

$$\|\eta'\|^2_{L^2(\mu,\infty;H)} + \|\sqrt{\alpha_0(\eta)}\theta'\|^2_{L^2(\mu,\infty;H)} + \sup_{t\ge\mu}\mathcal{F}(\eta(t),\theta(t)) \le M_\mu. \tag{2.7}$$

(P) の解の一意性については，[16] で以下のように議論されている：

**命題 2.3** (cf. [16, Theorem 2.2]). (A1)–(A4) を仮定し，$\Omega$ の空間次元は 1 であるとする．このとき，任意の初期値 $\{\eta_0,\theta_0\} \in D_0$ に対し命題 *2.2* で得られた (P) の解 $\{\eta,\theta\}$ は一意である．

$\partial I_{[-\theta^*,\theta^*]}(\cdot)$ の項がない結晶粒界数理モデル (P) の解の一意性は [10, Theorem 2.2] において命題 2.3 と同様な仮定の下で示された．$\partial I_{[-\theta^*,\theta^*]}(\theta)$ は $\theta$ に関して単調なので, [10, Theorem 2.2] と同様な議論により, 命題 2.3 を示すことができる．現在，$\Omega$ の次元が 2 以上，または，初期値 $\{\eta_0,\theta_0\} \notin D_0$ の場合，(P) の解の一意性は示されていない．関数 $\alpha_0(\eta)$ が $\eta$ に依存しているため，(P) の解の一意性を示すのは非常に困難である．しかし，$\alpha_0$ が正定数関数ならば，$\Omega$ が $\mathbf{R}^N$ $(N \ge 1)$ の有界領域でも，初期値 $\{\eta_0,\theta_0\} \in D$ でも，(P) の解の一意性を容易に示すことができる．

次に，時間 $t \to \infty$ のときの問題 (P) の解の漸近挙動について述べる．

**命題 2.4** (cf. [16, Theorem 4.1]). (A1)–(A5) を仮定し，$\{\eta,\theta\}$ を (P) の時間大域解とする．そして，$t \to \infty$ のときの $\{\eta(t),\theta(t)\}$ の $\omega$-極限集合を $\omega(\eta,\theta)$ とする，つまり

$$\omega(\eta,\theta) := \left\{ \{\xi,\zeta\} \in H \times H \;\middle|\; \begin{array}{c} \eta(t_n) \to \xi\ in\ H,\ \theta(t_n) \to \zeta\ in\ H \\ for\ some\ t_n\ with\ t_n \uparrow \infty \end{array} \right\}$$

とする．このとき，$\omega(\eta,\theta) \subset S_0 := \{\{\xi,0\}\,;\, \xi \in D(\Delta_N), -\kappa\Delta_N\xi + g(\xi) = 0\ in\ H\}$ となる．ここで，$S_0$ は (P) の定常解の集合である．

また，[16] では 関数 $g$ の特別な場合を考察し，以下のような (P) の解の漸近安定性を示した：

**命題 2.5** (cf. [16, Theorem 4.2]). (A1)–(A5), 及び,

$$g < 0 \ on \ [0,1), \quad g(1) = \hat{g}(1) = 0 \tag{2.8}$$

を仮定する. また, $\{\eta, \theta\}$ を (P) の任意の時間大域解とする. このとき, $\{1, 0\}$ は (P) の一意定常解で

$$\eta(t) \longrightarrow 1 \ in \ H^1, \quad \theta(t) \longrightarrow 0 \ in \ H_0^1 \quad as \ \ t \to \infty \tag{2.9}$$

となる. また, 収束 (2.9) は初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in D$ に関して一様である.

## 3 (P) により生成された多価半群に対するアトラクター

この節では, アトラクターの立場から問題 (P) の漸近安定性を考察する. 命題 2.2, 2.3 により, 初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in D$ をもつ (P) の時間大域解の存在は示されたが, 一意性は保証されていないことに注意する. 従って, 本節では解の一意性なしで (P) に対する大域的アトラクターを構成する. つまり, (P) により生成された多価半群に対するアトラクターを構成する.

さて, (P) の多価解作用素の族を $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ で表す. つまり, それぞれの $t \geq 0$ に対し, 多価解作用素 $S(t)$ は任意の初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in D$ に対し次の集合を対応させる：

$$S(t)\{\eta_0, \theta_0\} := \left\{ \{z, w\} \in D \ \middle| \ \begin{array}{c} \eta(0) = \eta_0, \ \theta(0) = \theta_0, \ \eta(t) = z, \ \theta(t) = w \\ \text{となる (P) の時間大域解 } \{\eta, \theta\} \text{ が存在する} \end{array} \right\}.$$

ここで, (P) の時間大域解は次の *Translation invariance* と *Concatenation invariance* の性質をもつことに注意する:

(i) (*Translation invariance*) $\{\eta, \theta\}$ を (P) の時間大域解とし, $\tau \geq 0$ とする. このとき,

$$\eta^\tau(t) := \eta(\tau + t) \ \text{ and } \ \theta^\tau(t) := \theta(\tau + t) \ \text{ for } t \in [0, \infty)$$

と定義すると, $\{\eta^\tau, \theta^\tau\}$ も (P) の時間大域解となる;

(ii) (*Concatenation invariance*) $\{\eta_1, \theta_1\}$, $\{\eta_2, \theta_2\}$ を

$$\eta_2(0) = \eta_1(\tau) \ \text{ and } \ \theta_2(0) = \theta_1(\tau) \text{ for some } \tau \geq 0$$

となる (P) の時間大域解とする. また, 時間 $\tau$ での $\{\eta_1, \theta_1\}$ と $\{\eta_2, \theta_2\}$ の *concatenation* を

$$\eta(t) := \begin{cases} \eta_1(t) & \text{if } t \in [0, \tau], \\ \eta_2(t - \tau) & \text{if } t \in (\tau, \infty), \end{cases}$$

$$\theta(t) := \begin{cases} \theta_1(t) & \text{if } t \in [0, \tau], \\ \theta_2(t - \tau) & \text{if } t \in (\tau, \infty) \end{cases}$$

と定義する. このとき $\{\eta, \theta\}$ は (P) の時間大域解となる.

上記の性質 (i), (ii) を考慮すると, 明らかに次が成り立つ:

(S1) $S(0) = I$ (The identity) on $D$.

(S2) $S(t+s)\{\eta_0, \theta_0\} = S(t)\left(S(s)\{\eta_0, \theta_0\}\right), \quad \forall\{\eta_0, \theta_0\} \in D,\ \forall s, t \in [0, \infty).$

従って, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ は $D$ 上の多価半群であることがわかる.

また, $S(\cdot)\{\cdot,\cdot\}$ は次のような closedness をもつ.

**補題 3.1.** *$t_n, t \in [0,\infty)$ with $t_n \to t$, $\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\} \in D$, $\{\eta_0, \theta_0\} \in D$ with $\eta_{0n} \to \eta_0$ in $H$, $\theta_{0n} \to \theta_0$ in $H$ (as $n \to \infty$)* と仮定する. また, $n \to \infty$ のとき $\{z_n, w_n\} \in S(t_n)\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\}$ は $\{z, w\}$ に $H \times H$ の位相で収束するとする. このとき, $\{z, w\} \in S(t)\{\eta_0, \theta_0\}$ となる.

証明. $t_n \to t$ (as $n \to \infty$) なので, 一般性を失うことなく, $t$, $t_n \in [0, T]$ ($n \in \mathbf{N}$) となる有限時間 $T > 0$ が存在すると仮定してよい.

$\{z_n, w_n\} \in S(t_n)\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\}$ なので,

$$\eta_n(t_n) = z_n, \quad \theta_n(t_n) = w_n, \quad \eta_n(0) = \eta_{0n}, \quad \theta_n(0) = \theta_{0n} \tag{3.1}$$

となる (P) の時間大域解 $\{\eta_n, \theta_n\}$ が存在する.

また, 命題 2.2 の (2.7) より, 任意の正数 $\mu \in (0, 1]$ に対し, 初期値 $\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\} \in D$ に依存しない正定数 $M_\mu$ が存在し

$$\|\eta_n'\|^2_{L^2(\mu,\infty;H)} + \|\sqrt{\alpha_0(\eta_n)}\theta_n'\|^2_{L^2(\mu,\infty;H)} + \sup_{t\geq\mu} \mathcal{F}(\eta_n(t), \theta_n(t)) \leq M_\mu$$

となる. このとき, [12, Section 5] での同様な議論により, つまり, $\mu$ に関する対角線論法により, $n_k \to \infty$ (as $k \to \infty$),

$$\eta_{n_k} \to \eta \ \text{ in } C([0,T]; H), \quad \theta_{n_k} \to \theta \ \text{ in } C([0,T]; H) \quad \text{as } k \to \infty \tag{3.2}$$

となる部分列 $\{n_k\} \subset \{n\}$ と関数 $\eta \in C([0,T]; H) \cap W^{1,2}_{loc}((0,T]; H) \cap L^\infty_{loc}((0,T]; H^1) \cap L^2_{loc}((0,T]; H^2)$, $\theta \in C([0,T]; H) \cap W^{1,2}_{loc}((0,T]; H) \cap L^\infty_{loc}((0,T]; H^1_0)$ が存在する. 更に, $\{\eta, \theta\}$ は初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in D$ をもつ (P) の時間大域解となることが容易にわかる.

さて, $z = \eta(t)$, $w = \theta(t)$ であること, つまり, $\{z, w\} \in S(t)\{\eta_0, \theta_0\}$ であることを示す. $\varepsilon$ を任意の正定数とすると, $\eta \in C([0,T]; H)$, $t_{n_k} \to t$ as $k \to \infty$ なので,

$$\|\eta(t_{n_k}) - \eta(t)\|_H \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall k \geq K_{1\varepsilon} \tag{3.3}$$

となる番号 $K_{1\varepsilon} \in \mathbf{N}$ が存在する.

一方, (3.2) から

$$\|\eta_{n_k} - \eta\|_{C([0,T];H)} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall k \geq K_{2\varepsilon} \tag{3.4}$$

となる番号 $K_{2\varepsilon} \in \mathbf{N}$ が存在する.

更に, $z_{n_k} \longrightarrow z$ in $H$ as $k \to \infty$ なので,

$$\|z - z_{n_k}\|_H \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall k \geq K_{3\varepsilon} \tag{3.5}$$

となる番号 $K_{3\varepsilon} \in \mathbf{N}$ が存在する．従って，(3.1)–(3.5) から以下をえる：

$$\begin{aligned}
\|z-\eta(t)\|_H &\le \|z-z_{n_k}\|_H + \|z_{n_k}-\eta(t_{n_k})\|_H + \|\eta(t_{n_k})-\eta(t)\|_H \\
&= \|z-z_{n_k}\|_H + \|\eta_{n_k}(t_{n_k})-\eta(t_{n_k})\|_H + \|\eta(t_{n_k})-\eta(t)\|_H \\
&\le \|z-z_{n_k}\|_H + \|\eta_{n_k}-\eta\|_{C([0,T];H)} + \|\eta(t_{n_k})-\eta(t)\|_H \\
&\le \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \qquad \forall k \ge K_{1\varepsilon}+K_{2\varepsilon}+K_{3\varepsilon}.
\end{aligned}$$

$\varepsilon$ は任意なので，上記より $z = \eta(t)$ であることがわかる．また，同様な議論により $w = \theta(t)$ となるので，$\{z,w\} \in S(t)\{\eta_0,\theta_0\}$ をえる．従って，補題 3.1 が証明された．□

**Remark 3.2.** 補題 3.1 により，それぞれの $t \ge 0$ に対し，多価解作用素 $S(t)\{\cdot,\cdot\}$ は $D$ 上で上半連続であることが容易にわかる．上半連続写像の定義や性質に関しては，[1, 4] を参照する．

更に，以下のような多価半群 $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ の性質が成り立つ．

**補題 3.3.** (A1)–(A5) を仮定する．このとき，次が成立する:

*(i)* それぞれの正数 $\mu \in (0,1]$ に対して，$\mathcal{F}(\eta(t),\theta(t))$ は任意の $t \ge \mu$ と (P) の任意の解 $\{\eta(t),\theta(t)\} \in S(t)D$ に対して有界である．

*(ii)* 次をみたすコンパクトな凸集合 $B_0(\subset D)$ が存在する：

$$\sup_{\{z,w\}\in B_0} \mathcal{F}(z,w) < \infty \quad \textit{and} \quad S(t)D \subset B_0 \quad \textit{for all } t \ge 1. \tag{3.6}$$

証明．評価式 (2.7) は (P) の任意の時間大域解 $\{\eta,\theta\}$ に対して成り立ち，また，(2.7) の定数 $M_\mu$ は初期値 $\{\eta_0,\theta_0\} \in D$ に依存しないことに注意する．従って，主張 (i) は (2.7) から従う．

次に (ii) を示す．実際，$B_0 := \overline{\mathrm{conv}}\,(S(1)D)$ とすればよい．ここで，$\overline{\mathrm{conv}}\,(\,\cdot\,)$ は $(\,\cdot\,)$ の凸包の $H \times H$ 位相における閉包を表す．

さて，(2.7) で $\mu = 1$ とすると

$$\sup_{\{z,w\}\in S(1)D} \mathcal{F}(z,w) \le M_1$$

となるので，$S(1)D$ は $H \times H$ で相対コンパクトである．従って，$B_0$ は $H \times H$ でコンパクトな凸集合である．

ここで，(2.5) と $\theta$ の制約 (cf. $\partial I_{[-\theta^*,\theta^*]}(\cdot)$) から，任意の $t \ge 0$ に対し $S(t)D \subset D$ となることに注意する．従って，半群の性質 (S2) から

$$S(t+1)D = S(1)S(t)D \subset S(1)D \subset B_0, \quad \forall t \ge 0$$

となり，(3.6) が成立する．以上より，主張 (ii) が成り立つ．□

さて，本稿の主定理を述べる．

**定理 3.4** ((P) の大域的アトラクターの存在). (A1)–(A4) を仮定する．このとき，次をみたす $D$ の部分集合 $\mathscr{A}_\infty$ が存在する：

*(i)* $\mathscr{A}_\infty$ は $H \times H$ の空でないコンパクト部分集合である；

*(ii)* それぞれの正数 $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\mathrm{dist}_{H\times H}(S(t)\{z,w\}, \mathscr{A}_\infty) < \varepsilon \quad \textit{for all } \{z,w\} \in D \textit{ and } t \geq T_\varepsilon$$

となる $T_\varepsilon > 0$ が存在する；

*(iii)* $S(t)\mathscr{A}_\infty = \mathscr{A}_\infty$ *for any* $t \geq 0$.

定理 3.4 の (i)–(iii) が成立するとき，$\mathscr{A}_\infty$ を多価半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ に対する大域的アトラクターとよぶ．大域的アトラクター $\mathscr{A}_\infty$ が存在するならば，明らかに $\mathscr{A}_\infty$ は一意である．

定理 *3.4* の証明．補題 3.1, 3.3 を考慮すると，[8, 23] と同様な手法により多価半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ に対する大域的アトラクター $\mathscr{A}_\infty$ を構成することができる．実際，$\mathscr{A}_\infty$ は

$$\mathscr{A}_\infty := \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)B_0} \tag{3.7}$$

で与えられる．ここで，$B_0$ は補題 3.3 の (ii) でえられたコンパクト吸収集合である．

Babin [2] や Melnik and Valero [22] は multivalued semiflow に対する大域的アトラクターの抽象論を既に構築している．従って，[2, 22] の抽象論を応用すれば，(P) に対するアトラクターを構成することはできる．しかしながら，抽象論 [2, 22] で構成されたアトラクターは一般的に multivalued semiflow に対し semi-invariant (cf. (3.14)) である．また，抽象論 [22] におけるアトラクターの構成方法は，(3.7) と異なる．従って，集合 $\mathscr{A}_\infty$ が多価半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ に対する大域的アトラクターとなることを明確にするため，$\mathscr{A}_\infty$ は定理 3.4 の (i)–(iii) を満たすことを以下で示す．

(P) の時間大域解の存在（cf. 命題 2.2）と $B_0$ のコンパクト性から，明らかに $\mathscr{A}_\infty$ は $H \times H$ の空でないコンパクト部分集合である．従って，定理 3.4 の (i) は成立する．

次に (ii) を示す．$B_0$ は吸収集合なので

$$\mathrm{dist}_{H\times H}(S(t)B_0, \mathscr{A}_\infty) \longrightarrow 0 \quad \text{as } t \to \infty \tag{3.8}$$

を示せばよい．

背理法により (3.8) を示す．集合 $\mathscr{A}_\infty$ は $B_0$ を引きつけないと仮定すると，

$$\|\{z_n, w_n\} - \{x,y\}\|_{H\times H} \geq \sigma_0, \quad \forall \{x,y\} \in \mathscr{A}_\infty \tag{3.9}$$

となる定数 $\sigma_0 > 0$ と列 $\{t_n\} \subset [0,\infty)$ with $t_n \geq n$, $\{\{\eta_{0n},\theta_{0n}\}\} \subset B_0$, $\{\{z_n,w_n\}\} \subset H \times H$ with $\{z_n,w_n\} \in S(t_n)\{\eta_{0n},\theta_{0n}\}$ が存在する．

$B_0$ は $H \times H$ のコンパクト吸収集合なので，(3.6) から

$$S(t)B_0 \subset B_0, \quad \forall t \geq 1$$

となる．従って，

$$\{\{z_n,w_n\} \in H \times H \ ; \ \{z_n,w_n\} \in S(t_n)\{\eta_{0n},\theta_{0n}\},\ n = 1,2,\cdots\}$$

は $H \times H$ で相対コンパクトである．よって，$n_k \to \infty$ (as $k \to \infty$),

$$\{z_{n_k},w_{n_k}\} \to \{z,w\} \ \text{ in } H \times H \ \text{ as } k \to \infty$$

となる部分列 $\{n_k\} \subset \{n\}$ と元 $\{z,w\} \in H \times H$ が存在する．

$\{z_{n_k},w_{n_k}\} \in S(t_{n_k})\{\eta_{0n_k},\theta_{0n_k}\}$，$\{\{\eta_{0n_k},\theta_{0n_k}\}\} \subset B_0$ なので，$\mathscr{A}_\infty$ の定義 (3.7) から

$$\{z,w\} \in \mathscr{A}_\infty$$

となり，(3.9) に矛盾する．従って，$\mathscr{A}_\infty$ はコンパクト吸収集合 $B_0$ を引きつけるので，定理 3.4 の (ii) が成り立つ．

最後に (iii) を示す．まず，任意の $t \geq 0$ に対し $\mathscr{A}_\infty \subset S(t)\mathscr{A}_\infty$ であることを示す．$\{z,w\}$ を $\mathscr{A}_\infty$ の任意の元とすると，

$$t_n \uparrow \infty \ \text{ and } \ \{z_n,w_n\} \longrightarrow \{z,w\} \ \text{ in } H \times H \ \text{ as } n \to \infty \tag{3.10}$$

となる列 $\{t_n\} \subset [0,\infty)$, $\{\{\eta_{0n},\theta_{0n}\}\} \subset B_0$, $\{\{z_n,w_n\}\} \subset H \times H$ with $\{z_n,w_n\} \in S(t_n)\{\eta_{0n},\theta_{0n}\}$ が存在する．ここで，$B_0$ は

$$S(\tau)B_0 \subset B_0, \quad \forall \tau \geq 1 \tag{3.11}$$

となる $H \times H$ のコンパクトな吸収部分集合であることに注意する．

任意の $t \geq 0$ に対し，半群の性質 (S2) から

$$\{z_n,w_n\} \in S(t)S(t_n - t)\{\eta_{0n},\theta_{0n}\} \quad \text{for any } n \in \mathbf{N} \text{ with } t_n \geq t+1$$

となるので，

$$\{z_n,w_n\} \in S(t)\{\widetilde{z}_n,\widetilde{w}_n\} \tag{3.12}$$

となる元 $\{\widetilde{z}_n,\widetilde{w}_n\} \in S(t_n - t)\{\eta_{0n},\theta_{0n}\}$ が存在する．このとき，(3.11) から

集合 $\{\{\widetilde{z}_n,\widetilde{w}_n\} \in H \times H;\ n \in \mathbf{N} \text{ with } t_n \geq t+1\}$ は $H \times H$ で相対コンパクト

であることがわかるので，$n_k \to \infty$ (as $k \to \infty$),

$$\{\widetilde{z}_{n_k},\widetilde{w}_{n_k}\} \to \{\widetilde{z},\widetilde{w}\} \ \text{ in } H \times H \ \text{ as } k \to \infty \tag{3.13}$$

となる部分列 $\{n_k\} \subset \{n\}$ と元 $\{\widetilde{z}, \widetilde{w}\} \in H \times H$ が存在する．このとき，$\mathscr{A}_\infty$ の定義 (3.7) から明らかに $\{\widetilde{z}, \widetilde{w}\} \in \mathscr{A}_\infty$ となる．

更に，補題 3.1 と (3.10)–(3.13) より（必要があれば $\{n_k\}$ の部分列をとることにより），

$$\{z, w\} \in S(t)\{\widetilde{z}, \widetilde{w}\}$$

となる．従って，$\{z, w\} \in S(t)\mathscr{A}_\infty$ となるので

$$\mathscr{A}_\infty \subset S(t)\mathscr{A}_\infty, \quad \forall t \geq 0 \tag{3.14}$$

をえる．

次に，任意の $t \geq 0$ に対し $S(t)\mathscr{A}_\infty \subset \mathscr{A}_\infty$ であることを示す．(3.14) より任意の $t \geq 0$ に対し

$$S(t)\mathscr{A}_\infty \subset S(t)(S(\tau)\mathscr{A}_\infty) = S(t+\tau)\mathscr{A}_\infty, \quad \forall \tau \geq 0 \tag{3.15}$$

となる．

さて，$\{z, w\}$ を $S(t)\mathscr{A}_\infty$ の任意の元とすると，(3.15) より

$$\{z, w\} \in S(t+\tau_n)\{z_n, w_n\}$$

となる列 $\{\tau_n\} \subset [0, \infty)$ with $\tau_n \geq n$ と $\{\{z_n, w_n\}\} \subset \mathscr{A}_\infty$ が存在する．$\mathscr{A}_\infty$ の定義 (3.7) から明らかに $\mathscr{A}_\infty \subset B_0$ なので，定理 3.4 の (ii) から

$$\{z, w\} \in \mathscr{A}_\infty$$

となる．よって，

$$S(t)\mathscr{A}_\infty \subset \mathscr{A}_\infty \text{ for any } t \geq 0$$

をえる．以上より，定理 3.4 の (iii) が従う． □

## 4 (P) に対する大域的アトラクターの特徴づけ

前節において (P) に対する大域的アトラクター $\mathscr{A}_\infty$ の存在を示した．しかし，解作用素 $S(t)$ は多価なので，任意の $t \geq 0$ と $\{z, w\} \in D$ に対し $S(t)\{z, w\}$ が連結であることを示すのは困難である．従って，$\mathscr{A}_\infty$ の連結性については示されていないことに注意する．

この節では，(P) に対する大域的アトラクター $\mathscr{A}_\infty$ の特徴づけを行う．そのため，以下の Allen-Cahn 方程式 (AC) を考える:

$$\text{(AC)}\begin{cases} u_t - \kappa\Delta u + g(u) = 0 & \text{in } Q_T = \Omega \times (0, T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \Sigma_T = \Gamma \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{for } x \in \Omega. \end{cases}$$

ここで，(AC) の初期値の集合を

$$D_* := \{u_0 \mid u_0 \in H \text{ with } 0 \le u_0 \le 1 \text{ a.e. on } \Omega\}$$

と定義する．

次に，(AC) の解の定義を与える．

**定義 4.1.** $0 < T < \infty$ とし，$u_0 \in D_*$ とする．関数 $u : [0,T] \to H$ が次の条件をみたすとき，$u$ は初期値 $u_0 \in D_*$ をもつ (AC) の $[0,T]$ 上の解であるという：

(i) $u \in C([0,T];H) \cap W^{1,2}_{loc}((0,T];H) \cap L^\infty_{loc}((0,T];H^1) \cap L^2_{loc}((0,T];H^2)$.

(ii) 次の放物型方程式が成立する:

$$u'(t) - \kappa\Delta_N u(t) + g(u(t)) = 0 \quad \text{in } H \quad \text{for a.e. } t \in (0,T). \tag{4.1}$$

ここで，$u' := \frac{du}{dt}$ である．

(iii) $u(0) = u_0$ in $H$.

関数 $u : [0,\infty) \to H$ が (AC) の時間大域解であるとは，任意の $T > 0$ に対して $u$ が (AC) の $[0,T]$ 上の解であるときをいう．

次に，(AC) の解の存在・一意性について述べる．

**命題 4.2** (cf. [3, 13]). (A3) を仮定し，$T$ を任意の正数とする．このとき，任意の $u_0 \in D_*$ に対し，(AC) の $[0,T]$ 上の解 $u$ が一意に存在し

$$0 \le u \le 1 \qquad a.e \ on \ Q_T \tag{4.2}$$

となる．更に，初期値 $u_0 \in D_*$ に依存しない定数 $\widetilde{N}_0$ が存在して

$$\sup_{t\ge 0} \int_t^{t+1} \|\nabla u(\tau)\|_H^2 d\tau \le \widetilde{N}_0 \tag{4.3}$$

が成り立つ．また，それぞれの正数 $\mu \in (0,1]$ に対し，初期値 $u_0 \in D_*$ に依存しない定数 $\widetilde{M}_\mu$ が存在して，次が成り立つ：

$$\|u'\|^2_{L^2(\mu,\infty;H)} + \sup_{t\ge\mu} \|\nabla u(t)\|_H^2 \le \widetilde{M}_\mu. \tag{4.4}$$

証明．非線形発展方程式理論 (cf. [3, 13]) を適用することにより，容易に (AC) の $[0,T]$ 上の解 $u$ が一意に存在することがわかる．また，(2.5)–(2.7) と同様な議論により，(4.2)–(4.4) を示すことができる．実際，有界性 (4.2) に関しては [10, Proposition 3.1] を，(4.3)–(4.4) の証明に関しては [13, Corollarys 1 and 2] や [16, Theorem 3.1] を参照する． □

命題 4.2 により，(AC) の解作用素の族 $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ を定義することができる．実際，それぞれの $t\geq 0$ に対し，一価解作用素 $U(t): D_* \to D_*$ を

$$U(t)u_0 = u(t), \quad u_0 \in D_* \tag{4.5}$$

と定義する．ここで，$u$ は初期値 $u_0 \in D_*$ をもつ (AC) の時間大域一意解である．明らかに，$\{U(t)\}_{t\geq 0}$ は $D_*$ 上の一価半群である．

ここで，半群 $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ に対する大域的アトラクターの存在について述べる．

**命題 4.3** (cf. [13, Theorem 4.1]). (A3) を仮定する．このとき，次をみたす $D_*$ の部分集合 $\mathscr{A}_*$ が存在する：

*(i)* $\mathscr{A}_*$ は $H$ の空でないコンパクトな連結部分集合である；

*(ii)* それぞれの正数 $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\mathrm{dist}_H(U(t)z, \mathscr{A}_*) < \varepsilon \quad \textit{for all } z \in D_* \textit{ and } t \geq T_\varepsilon$$

となる $T_\varepsilon > 0$ が存在する；

*(iii)* $U(t)\mathscr{A}_* = \mathscr{A}_*$ *for any* $t \geq 0$.

証明. 命題 4.2 により，(AC) は一意解をもつので $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ は $D_*$ 上の一価半群である．(4.2)–(4.4) の性質により，(AC) に対しアトラクターの一般論 (cf. [8, 13, 23]) を直接適用することができるので，$\{U(t)\}_{t\geq 0}$ に対する大域的アトラクター $\mathscr{A}_*$ を構成することができる．実際，$B_* := \overline{\mathrm{conv}}\,(U(1)D_*)$ は $H$ のコンパクトな吸収部分集合となるので (cf. 補題 3.3, (ii))，$\{U(t)\}_{t\geq 0}$ に対する大域的アトラクター $\mathscr{A}_*$ は

$$\mathscr{A}_* := \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} U(t)B_*}$$

で与えられる． □

さて，定理 3.4 でえた (P) の大域的アトラクター $\mathscr{A}_\infty$ の特徴について述べる．

**定理 4.4.** (A1)–(A4) を仮定し，$\mathscr{A}_\infty$ を定理 *3.4* でえられた (P) の大域的アトラクターとする．また，$\mathscr{A}_*$ を命題 *4.3* でえられた (AC) の大域的アトラクターとする．このとき，$\mathscr{A}_* \times \{0\} \subset \mathscr{A}_\infty$ となる．更に，$\alpha_0$ は正定数関数であるとする，つまり $\alpha_0 \equiv c_0$ *for some constant* $c_0 > 0$ と仮定すると $\mathscr{A}_\infty = \mathscr{A}_* \times \{0\}$ となる．

**定理 4.5.** (A1)–(A4)，(2.8) を仮定し，$\mathscr{A}_\infty$ を定理 *3.4* でえられた (P) の大域的アトラクターとする．また，$\mathscr{A}_*$ を命題 *4.3* でえられた (AC) の大域的アトラクターとする．このとき，$\mathscr{A}_* = \{1\}$，$\mathscr{A}_\infty = \mathscr{A}_* \times \{0\} = \{1\} \times \{0\}$ となる．

定理 4.4 を証明する準備として，次の補題を用意する．

**補題 4.6.** 定理 *4.4* の条件をすべて仮定する．また，$T$ を任意の正数とし，$\{\eta, \theta\}$ を (P) の任意の時間大域解とする．このとき，

$$\int_0^T \|\nabla\theta(t+s)\|_H^2 ds \longrightarrow 0 \quad as \ \ t \to \infty \tag{4.6}$$

となり，また，収束 (4.6) は任意の初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in D$ に関して一様である．

証明. 背理法により (4.6) を示す．(4.6) が成立しないと仮定すると, ある正定数 $\sigma_0 > 0$ に対し

$$\int_0^T \|\nabla\theta_n(t_n+s)\|_H^2 ds \geq \sigma_0 \tag{4.7}$$

となる (P) の時間大域解の列 $\{\{\eta_n, \theta_n\}\}$ と時間列 $\{t_n\} \subset [0, \infty)$ with $t_n \geq n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が存在する．

ここで，(P) の解の平滑化効果 (cf. (2.7)) を考慮すると，$\{\eta_n, \theta_n\}$ は初期値 $\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\} \in D_0$ をもつ (P) の時間大域解であると仮定してよい．また，$\{\{\eta_{0n}, \theta_{0n}\}\}$ は $H^1 \times H_0^1$ で有界であると仮定してもよいので (cf. (2.7)),

$$\begin{aligned} &\eta_{0n} \longrightarrow \eta_0 \text{ weakly in } H^1 \text{ and weakly}^* \text{ in } L^\infty \text{ as } n \to \infty, \\ &\theta_{0n} \longrightarrow \theta_0 \text{ weakly in } H_0^1 \text{ and weakly}^* \text{ in } L^\infty \text{ as } n \to \infty \end{aligned}$$

となる $\{\eta_0, \theta_0\} \in D_0$ が存在する．このとき，[12, Section 5] と同様な議論により，$n_k \to \infty$ as $k \to \infty$，かつ，任意の時間 $T > 0$ に対し

$$\begin{aligned} \eta_{n_k} \to \eta \quad & \text{in } C([0,T]; H), \text{ in } L^2(0,T;H^1), \text{ weakly in } L^2(0,T;H^2), \\ & \text{weakly in } W^{1,2}(0,T;H), \text{ weakly}^* \text{ in } L^\infty(0,T;H^1), \\ & \text{and weakly}^* \text{ in } L^\infty(Q_T) \quad \text{as } k \to \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{n_k} \to \theta \quad & \text{in } C([0,T]; H), \text{ in } L^2(0,T;H_0^1), \text{ weakly in } W^{1,2}(0,T;H), \\ & \text{weakly}^* \text{ in } L^\infty(0,T;H_0^1) \text{ and weakly}^* \text{ in } L^\infty(Q_T) \quad \text{as } k \to \infty \end{aligned} \tag{4.8}$$

となる部分列 $\{n_k\} \subset \{n\}$ と初期値 $\{\eta_0, \theta_0\} \in D_0$ をもつ (P) の時間大域解 $\{\eta, \theta\}$ が存在する．明らかに $\eta \in C([0,T];H^1) \cap W^{1,2}(0,T;H) \cap L^2(0,T;H^2) \cap L^\infty(0,T;H^1) \cap L^\infty(Q_T)$, $\theta \in W^{1,2}(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;H_0^1) \cap L^\infty(Q_T)$ である．

さて，$\varepsilon$ を $\varepsilon < \left(\frac{\nu\sigma_0}{8c_0}\right)^{1/2}$ となる任意の正数とする．このとき，命題 2.4 より

$$\|\theta(t)\|_H < \varepsilon \quad \text{for all } t \geq T_\varepsilon \tag{4.9}$$

となる有限時間 $T_\varepsilon > 0$ が存在する．また，(4.8) より

$$\sup_{\tau \in [0, T_\varepsilon]} \|\theta_{n_k}(\tau) - \theta(\tau)\|_H < \varepsilon, \quad \forall k \geq K_\varepsilon \tag{4.10}$$

となる番号 $K_\varepsilon \in \mathbf{N}$ が存在する．

ここで，$\alpha_0$ は正定数関数であるとする，つまり，$\alpha_0 \equiv c_0$ for some constant $c_0 > 0$ と仮定する．$\{\eta_{n_k}, \theta_{n_k}\}$ は (P) の時間大域解なので，次の不等式が成り立つ (cf. (2.3)):

$$\left(c_0\theta'_{n_k}(\tau), \theta_{n_k}(\tau) - v\right) + \varphi(\eta_{n_k}(\tau); \theta_{n_k}(\tau)) \leq \varphi(\eta_{n_k}(\tau); v)$$
$$\text{for a.e. } \tau > 0 \text{ and any } v \in H_0^1$$

上の不等式において $v = 0$ とすると

$$\frac{c_0}{2}\frac{d}{d\tau}\|\theta_{n_k}(\tau)\|_H^2 + \varphi(\eta_{n_k}(\tau); \theta_{n_k}(\tau)) \leq 0 \quad \text{for a.e. } \tau > 0$$

となるので，$\tau$ に関して $[s, t]$ $(0 \leq s \leq t)$ 上で積分すると

$$\frac{c_0}{2}\|\theta_{n_k}(t)\|_H^2 + \int_s^t \varphi(\eta_{n_k}(\tau); \theta_{n_k}(\tau))d\tau \leq \frac{c_0}{2}\|\theta_{n_k}(s)\|_H^2 \qquad (4.11)$$
$$\text{for any } 0 \leq s \leq t$$

をえる．従って，(4.11) から $\|\theta_{n_k}(t)\|_H$ は時間 $t > 0$ に関して非増加であることがわかる．よって，(4.9)–(4.10) から

$$\begin{aligned}\|\theta_{n_k}(t)\|_H &\leq \|\theta_{n_k}(T_\varepsilon)\|_H \\ &\leq \sup_{\tau \in [0, T_\varepsilon]} \|\theta_{n_k}(\tau) - \theta(\tau)\|_H + \|\theta(T_\varepsilon)\|_H \\ &\leq 2\varepsilon, \qquad \forall t \geq T_\varepsilon,\ \forall k \geq K_\varepsilon\end{aligned}$$

となるので，$t_{n_k} \geq T_\varepsilon$ となる十分大きな番号 $k$ $(\geq K_\varepsilon)$ に対して

$$\|\theta_{n_k}(t_{n_k})\|_H \leq 2\varepsilon \qquad (4.12)$$

となる．

ここで，(4.12) をみたす時間の列を $\{t_{n_k}\}$ とする．(4.11) において，$s = t_{n_k}$，$t = t_{n_k} + T$ とすると

$$\frac{c_0}{2}\|\theta_{n_k}(t_{n_k} + T)\|_H^2 + \int_{t_{n_k}}^{t_{n_k}+T} \varphi(\eta_{n_k}(\tau); \theta_{n_k}(\tau))d\tau \leq \frac{c_0}{2}\|\theta_{n_k}(t_{n_k})\|_H^2 \qquad (4.13)$$

となる．従って，(2.4)，(4.12)，(4.13) から，$t_{n_k} \geq T_\varepsilon$ となる十分大きな番号 $k$ $(\geq K_\varepsilon)$ に対して

$$\int_0^T \|\nabla\theta_{n_k}(t_{n_k} + s)\|_H^2 ds \leq \frac{4c_0}{\nu}\varepsilon^2 < \frac{\sigma_0}{2} \qquad (4.14)$$

をえる．これは (4.7) に矛盾する．よって，(4.6) が成立する． □

**補題 4.7.** 定理 *4.4* の条件をすべて仮定する．また，$T$ を任意の正数とする．このとき，任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し，次が成立するような時間 $t^* = t^*(T, \varepsilon) \geq 1$ が存在する：

$$\sup_{\tau \in [0, T]} \|\eta(\tau + t) - U(\tau)\eta(t)\|_H \leq \varepsilon \qquad (4.15)$$
$$\textit{for all } t \geq t^* \textit{ and all global (in time) solutions } \{\eta, \theta\} \textit{ to } \text{(P)}.$$

証明. 背理法により (4.15) を示す. (4.15) が成立しないと仮定すると, ある正定数 $\varepsilon_0 > 0$ に対し

$$\sup_{\tau\in[0,T]} \|\eta_n(\tau+t_n) - U(\tau)\eta_n(t_n)\|_H \geq \varepsilon_0 \tag{4.16}$$

となる (P) の時間大域解の列 $\{\{\eta_n, \theta_n\}\}$ と時間の列 $\{t_n\} \subset [0,\infty)$ with $t_n \geq n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が存在する.

有界性の評価 (2.5) と (2.7) より, $\{\eta_n(t_n)\,;\, n = 1, 2, \cdots\}$ は $H$ で相対コンパクトであることがわかる. 従って, $n_k \to \infty$ as $k \to \infty$ で

$$\eta_{n_k}(t_{n_k}) \longrightarrow \widetilde{\eta}_0 \text{ in } H, \text{ weakly in } H^1 \text{ and weakly* in } L^\infty \text{ as } k \to \infty \tag{4.17}$$

となる部分列 $\{n_k\} \subset \{n\}$ と元 $\widetilde{\eta}_0 \in D_*$ が存在する.

ここで, 以下の2つの初期値問題を考える:

$$\begin{cases} u'_{n_k}(\tau) - \kappa\Delta_N u_{n_k}(\tau) + g(u_{n_k}(\tau)) = 0 \text{ in } H \text{ for a.e. } \tau \in (0,T), \\ u_{n_k}(0) = \eta_{n_k}(t_{n_k}) \text{ in } H, \end{cases} \tag{4.18}$$

$$\begin{cases} u'(\tau) - \kappa\Delta_N u(\tau) + g(u(\tau)) = 0 \text{ in } H \text{ for a.e. } \tau \in (0,T), \\ u(0) = \widetilde{\eta}_0 \text{ in } H. \end{cases} \tag{4.19}$$

このとき, (4.17) に注意すると, 解の収束定理 (cf. [14, Section 2.7]) より (4.18) の解 $u_{n_k}$ は (4.19) の解 $u$ に

$$\sup_{\tau\in[0,T]} \|u_{n_k}(\tau) - u(\tau)\|_H \longrightarrow 0 \quad \text{as } k \to \infty \tag{4.20}$$

の意味で収束する.

次に, (P) の第1の方程式

$$\begin{cases} \eta'_{n_k}(\tau) - \kappa\Delta_N \eta_{n_k}(\tau) + g(\eta_{n_k}(\tau)) + \alpha'(\eta_{n_k}(\tau))|\nabla\theta_{n_k}(\tau)| = 0 \text{ in } H \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{for a.e. } \tau > 0, \\ \eta_{n_k}(0) = \eta_{0n_k} \text{ in } H \end{cases} \tag{4.21}$$

を考える. このとき, (4.19) と (4.21) から

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|\eta_{n_k}(\tau+t_{n_k}) - u(\tau)\|_H^2 + \kappa\|\nabla\eta_{n_k}(\tau+t_{n_k}) - \nabla u(\tau)\|_H^2 \\ \leq\ & L(g)\|\eta_{n_k}(\tau+t_{n_k}) - u(\tau)\|_H^2 \\ &\qquad + |(\alpha'(\eta_{n_k}(\tau+t_{n_k}))|\nabla\theta_{n_k}(\tau+t_{n_k})|, \eta_{n_k}(\tau+t_{n_k}) - u(\tau))| \\ &\qquad\qquad \text{for a.e. } \tau \geq 0 \end{aligned} \tag{4.22}$$

となる. ここで, $\alpha'(\cdot)$ の有界性 (cf. (A2)) と (4.22) から

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau}\|\eta_{n_k}(\tau+t_{n_k}) - u(\tau)\|_H^2 \\ \leq\ & (2L(g)+1)\|\eta_{n_k}(\tau+t_{n_k}) - u(\tau)\|_H^2 + C_{\alpha'}\|\nabla\theta_{n_k}(\tau+t_{n_k})\|_H^2 \\ &\qquad \text{for a.e. } \tau > 0 \end{aligned} \tag{4.23}$$

となる．ここで，$C_{\alpha'}$ は $\alpha'(\cdot)$ に依存する正定数である．(4.23) に Gronwall-type 不等式を適用すると

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\tau\in[0,T]} \|\eta_{n_k}(\tau+t_{n_k})-u(\tau)\|_H^2 \\
\leq\ & e^{(2L(g)+1)T}\left(\|\eta_{n_k}(t_{n_k})-\widetilde{\eta}_0\|_H^2 + C_{\alpha'}\int_0^T \|\nabla\theta_{n_k}(\tau+t_{n_k})\|_H^2 d\tau\right)
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

をえる．補題 4.6 の証明から (cf. (4.14))，任意の正数 $\sigma$ に対し，

$$
\int_0^T \|\nabla\theta_{n_k}(\tau+t_{n_k})\|_H^2 d\tau < \sigma \quad \text{for sufficient large } k\in\mathbf{N}
$$

となるので，(4.17) と (4.24) から

$$
\sup_{\tau\in[0,T]} \|\eta_{n_k}(\tau+t_{n_k})-u(\tau)\|_H^2 \longrightarrow 0 \quad \text{as } k\to\infty \tag{4.25}
$$

となる．従って，(4.20) と (4.25) から

$$
\sup_{\tau\in[0,T]} \|\eta_{n_k}(\tau+t_{n_k})-u_{n_k}(\tau)\|_H^2 \longrightarrow 0 \quad \text{as } k\to\infty
$$

となる．$u_{n_k}(\tau)=U(\tau)\eta_{n_k}(t_{n_k})$ であるので，これは (4.16) に矛盾する．よって，(4.15) は成り立つ． □

定理 *4.4* の証明．まず $\mathscr{A}_*\times\{0\}\subset\mathscr{A}_\infty$ を示す．$\{\xi,0\}$ を $\mathscr{A}_*\times\{0\}$ の任意の元とすると

$$
U(t_n)\eta_{0n} \longrightarrow \xi \ \text{ in } H \text{ as } n\to\infty \tag{4.26}
$$

となる列 $\{\eta_{0n}\}\subset B_*(\subset D_*)$ と列 $\{t_n\}\subset[0,\infty)$ with $t_n\geq n$ $(n=1,2,\cdots)$ が存在する．

ここで，任意の $t\geq 0$ に対し $\eta_n(t):=U(t)\eta_{0n}$ とおくと，$\eta_n$ は

$$
\begin{cases}
\eta_n'(t)-\kappa\Delta_N\eta_n(t)+g(\eta_n(t))+\alpha'(\eta_n(t))|\nabla 0|=0 \ \text{ in } H \ \text{ for a.e. } t>0, \\
\eta_n(0)=\eta_{0n} \ \text{ in } H
\end{cases}
\tag{4.27}
$$

をみたすことに注意する．また，0 は

$$
\partial\varphi(\eta_n(t);0)\ni 0 \ \text{ in } H \ \text{ for a.e. } t>0 \tag{4.28}
$$

をみたすので，0 は方程式 (2.3) の定常解であることにも注意する．従って，(4.27) と (4.28) より，$\{\eta_n(t),0\}=\{U(t)\eta_{0n},0\}$ は初期値 $\{\eta_{0n},0\}\in D_0$ をもつ (P) の時間大域解とみなすことができるので，

$$
S(t_n)\{\eta_{0n},0\}\ni\{U(t_n)\eta_{0n},0\}
$$

となる．

半群の性質 (S2) から，$S(t_n)\{\eta_{0n},0\}=S(t_n-1)S(1)\{\eta_{0n},0\}$ となるので，

$$\{U(t_n)\eta_{0n},0\}\in S(t_n-1)\{\tilde{\eta}_n,\tilde{\theta}_n\}\quad \text{and}\quad \{\tilde{\eta}_n,\tilde{\theta}_n\}\in S(1)\{\eta_{0n},0\}$$

となる列 $\{\{\tilde{\eta}_n,\tilde{\theta}_n\}\}\subset B_0$ が存在する．従って，(3.7), (4.26) から

$$\{\xi,0\}\in\mathscr{A}_\infty=\bigcap_{s\geq 0}\overline{\bigcup_{t\geq s}S(t)B_0}$$

となるので，$\mathscr{A}_*\times\{0\}\subset\mathscr{A}_\infty$ が成り立つ．

次に $\mathscr{A}_\infty\subset\mathscr{A}_*\times\{0\}$ を示す．そのため，$\alpha_0$ は正定数関数であるとする，つまり，$\alpha_0\equiv c_0$ for some constant $c_0>0$ と仮定する．このとき，(P) の時間大域解は一意であることに注意する．

$\{\xi,\zeta\}$ を $\mathscr{A}_\infty$ の任意の元とすると，$\mathscr{A}_\infty$ の定義 (3.7) から

$$S(t_n)\{\eta_{0n},\theta_{0n}\}\longrightarrow\{\xi,\zeta\}\quad \text{in } H\times H \text{ as } n\to\infty \tag{4.29}$$

となる列 $\{\{\eta_{0n},\theta_{0n}\}\}\subset B_0$ と $\{t_n\}\subset[0,\infty)$ with $t_n\geq n$ $(n=1,2,\cdots)$ が存在する．ここで，任意の $t\geq 0$ に対し $\{\eta_n(t),\theta_n(t)\}:=S(t)\{\eta_{0n},\theta_{0n}\}$ とおく．

$\varepsilon$ を任意の正定数とする．このとき，補題 4.6 の証明中の (4.12) により

$$\|\theta_n(t_n)\|_H<\varepsilon,\quad \forall n\geq N_{1\varepsilon}$$

となる番号 $N_{1\varepsilon}\in\mathbf{N}$ が存在する．従って，(4.29) から

$$\zeta=0\ \text{ in } H \tag{4.30}$$

であることがわかる．

$\mathscr{A}_*$ は (AC) の大域的アトラクターなので，$\varepsilon>0$ に対し

$$\mathrm{dist}_H(U(\tau)u_0,\mathscr{A}_*)\leq\frac{\varepsilon}{3}\quad \text{for all } u_0\in D_* \text{ and } \tau\geq\tau_0 \tag{4.31}$$

となる有限時間 $\tau_0=\tau_0(\varepsilon)>0$ が存在する．

また，(4.29) より

$$\begin{cases}\widetilde{t}_n:=t_n-\tau_0\geq 0, & \forall n\geq N_{2\varepsilon},\\ \|\eta_n(\widetilde{t}_n+\tau_0)-\xi\|_H<\dfrac{\varepsilon}{3}, & \forall n\geq N_{2\varepsilon}\end{cases} \tag{4.32}$$

となる番号 $N_{2\varepsilon}\in\mathbf{N}$ が存在する．このとき，$n\geq N_{2\varepsilon}$ となる任意の番号 $n$ に対して $\eta_n(\widetilde{t}_n)\in D_*$ なので，(4.31) より

$$\mathrm{dist}_H(U(\tau_0)\eta_n(\widetilde{t}_n),\mathscr{A}_*)\leq\frac{\varepsilon}{3},\quad \forall n\geq N_{2\varepsilon} \tag{4.33}$$

となる．

ここで，$T=\tau_0$ として補題 4.7 を適用すると，番号 $n$ に依存しない時間 $t^*=t^*(\tau_0,\varepsilon)\geq 1$ が存在し

$$\sup_{\tau\in[0,\tau_0]}\|\eta_n(\tau+t)-U(\tau)\eta_n(t)\|_H\leq\frac{\varepsilon}{3},\quad \forall t\geq t^* \tag{4.34}$$

となる．このとき，$t^*$ に対し

$$\widetilde{t}_n:=t_n-\tau_0\geq t^*,\quad \forall n\geq N_{3\varepsilon}$$

となる番号 $N_{3\varepsilon}\in\mathbf{N}$ が存在するので，(4.34) より

$$\sup_{\tau\in[0,\tau_0]}\|\eta_n(\tau+\widetilde{t}_n)-U(\tau)\eta_n(\widetilde{t}_n)\|_H\leq\frac{\varepsilon}{3},\quad \forall n\geq N_{3\varepsilon} \tag{4.35}$$

となる．

従って，(4.32)–(4.35) より

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}_H(\xi,\mathscr{A}_*)\ &\leq\|\xi-\eta_n(\tau_0+\widetilde{t}_n)\|_H+\|\eta_n(\tau_0+\widetilde{t}_n)-U(\tau_0)\eta_n(\widetilde{t}_n)\|_H\\&\qquad+\mathrm{dist}_H(U(\tau_0)\eta_n(\widetilde{t}_n),\mathscr{A}_*)\\&\leq\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\quad \forall n\geq N_{2\varepsilon}+N_{3\varepsilon}\end{aligned}$$

となるので

$$\xi\in\mathscr{A}_* \tag{4.36}$$

をえる．よって，(4.30) と (4.36) から $\{\xi,\zeta\}=\{\xi,0\}\in\mathscr{A}_*\times\{0\}$ が成り立つので，$\mathscr{A}_\infty\subset\mathscr{A}_*\times\{0\}$ をえる．

以上より，定理 4.4 が成り立つ． □

*定理 4.5 の証明.* 命題 2.5 (cf. [16, Theorem 4.2]) において，特別な $g$ の場合，解の一意性なしで (P) の漸近安定性がえられている．実際，(2.8) を仮定し，$\{\eta,\theta\}$ を (P) の任意の時間大域解とすると，$\{1,0\}$ は (P) の一意定常解で

$$\eta(t)\longrightarrow 1 \text{ in } H^1,\qquad \theta(t)\longrightarrow 0 \text{ in } H_0^1\quad \text{as } t\to\infty \tag{4.37}$$

となり，収束 (4.37) は初期値 $\{\eta_0,\theta_0\}\in D$ に関して一様である．

このとき，(4.37) より明らかに，$\mathscr{A}_\infty$ の任意の元 $\{\xi,\zeta\}$ は

$$\xi=1 \text{ in } H,\quad \zeta=0 \text{ in } H$$

となり，$\mathscr{A}_*=\{1\}$ となる．従って，$\mathscr{A}_\infty=\mathscr{A}_*\times\{0\}=\{1\}\times\{0\}$ をえる． □

**Remark 4.8.** $\alpha_0$ が正定数関数であるとき，また，$g(\cdot)$ が特別な関数 (cf. (2.8)) であるとき，(P) の大域的アトラクター $\mathscr{A}_\infty$ を (AC) のアトラクター $\mathscr{A}_*$ を用いて特徴づけることができた．しかし, それ以外の場合, $\mathscr{A}_\infty$ の構造については連結性を含めて未解決である．

## 参考文献


[1] J. P. Aubin and H. F. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Systems & Control: Foundations & Applications **2**, Bikhaüser, Boston-Basel-Berlin, 1990.

[2] A. V. Babin, The attractor of a generalized semigroup generated by an elliptic equation in a tube domain, (Russian) Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat., **58**(1994), 3–18; translation in Russian Acad. Sci. Izv. Math., **44**(1995), 207–223

[3] H. Brézis, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[4] F. E. Browder, Nonlinear operators and nonlinear equation in Banach space, in *Proceedings, Symposium in Pure Mathematics*, **Vol. 18**, Part 2, Amer. Math. Soc., 1976.

[5] J. W. Cahn, P. Fife and O. Penrose, A phase-field model for diffusion-induced grain-boundary motion, Acta mater., **45**(1997), 4397–4413.

[6] L. Q. Chen, Phase-field models for microstructure evolution, Annu. Rev. Mater Res., **32**(2002), 113–140.

[7] K. Deckelnick and C. M. Elliott, An existence and uniqueness result for a phase-field model of diffusion-induced grain-boundary motion, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **131**(2001), 1323–1344.

[8] J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs **25**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1988.

[9] A. Ito, M. Gokieli, M. Niezgódka and M. Szpindler, Mathematical analysis of approximate system for one-dimensional grain boundary motion of Kobayashi-Warren-Carter type, (submitted).

[10] A. Ito, N. Kenmochi and N. Yamazaki, A phase-field model of grain boundary motion, Appl. Math., **53**(2008), 433–454.

[11] A. Ito, N. Kenmochi and N. Yamazaki, Weak solutions of grain boundary motion model with singularity, Rend. Mat. Appl. (7), **29**(2009), 51–63.

[12] A. Ito, N. Kenmochi and N. Yamazaki, Global solvability of a model for grain boundary motion with constraint, Discrete Contin. Dyn. Syst., Series S (to appear).

[13] A. Ito, N. Yamazaki and N. Kenmochi, Attractors of nonlinear evolution systems generated by time-dependent subdifferentials in Hilbert spaces, in *Dynamical systems and differential equations, Vol. I (Springfield, MO, 1996)*, Discrete Contin. Dynam. Systems 1998, Added Volume I, 327–349.

[14] N. Kenmochi, Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications, Bull. Fac. Education, Chiba Univ., **30**(1981), 1–87.

[15] N. Kenmochi, Monotonicity and Compactness Methods for Nonlinear Variational Inequalities, in *Handbook of Differential Equations, Stationary Partial Differential Equations, Vol.* **4**, ed. M. Chipot, Chapter 4, 203–298, North Holland, Amsterdam, 2007.

[16] N. Kenmochi and N. Yamazaki, Large-time behavior of solutions to a phase-field model of grain boundary motion with constraint, in *Current Advances in Nonlinear Analysis and Related Topics*, 389–403, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., **32**, Gakko-tosho, Tokyo, 2010.

[17] N. Kenmochi and N. Yamazaki, Global attractor of the multivalued semigroup associated with a phase-field model of grain boundary motion with constraint, Discrete Contin. Dyn. Syst., Series A, A Supplement Volume, (to appear).

[18] R. Kobayashi, J. A. Warren and W. C. Carter, A continuum model of grain boundaries, Phys. D, **140**(2000), 141–150.

[19] R. Kobayashi, J. A. Warren and W. C. Carter, Grain boundary model and singular diffusivity, in *Free boundary problems: theory and applications, II (Chiba, 1999)*, 283–294, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., **14**, Gakko-tosho, Tokyo, 2000.

[20] A. E. Lobkovsky and J. A. Warren, Phase field model of premelting of grain boundaries, Phys. D, **164**(2002), 202–212.

[21] M. T. Lusk, A phase field paradigm for grain growth and recrystallization, Proc. R. Soc. London A, **455**(1999), 677–700.

[22] V. S. Melnik and J. Valero, On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions, Set-Valued Anal., **6**(1998), 83–111.

[23] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Second edition, Applied Mathematical Sciences, **68**, Springer-Verlag, New York, 1997.